Παράσταση σφάλματος του Κανόνα του Τραπεζίου. 18/12/2017.

Έστω $f \in C^2[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$R_2(f) = I(f) - Q_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

Απόδειξη

$$R_2(f) = I(f) - Q_2(f) = I(f) - Q_2(P_1)$$
$$= I(f) - I(P_1)$$
$$= I(f - P_1)$$
$$= \int_a^b (f(x) - P_1(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-b)\,dx = -\int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(b-x)\,dx$$

Θα εφαρμόσω το ΘΜΤ

$$-2R_2(f) = \int_a^b f''(\xi(x))(x-a)(b-x)\,dx$$

Έστω $m = \min\limits_{a \le x \le b} f''(x)$, $M = \max\limits_{a \le x \le b} f''(x)$

$$m \cdot \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx \le -2R_2(f) \le M \cdot \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$$

Από Θεώρημα Ενδιαμ. Τιμής. $\exists\, \xi^{a} \in (a,b)$

τ.ω $-2R_2(f) = f''(\xi) \cdot \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$

$$\Leftrightarrow R_2(f) = -\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$$

Έστω $x = a + h\cdot s$ όπου $h = (b-a)$

$$\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx = \int_a^b (a+hs-a)(b-(a+hs))\,d(a+hs)$$

$$= h^3 \int_0^1 s(1-s)\,ds = h^3 \int_0^1 (s - s^2)\,ds = h^3 \cdot \left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3}\right]_0^1 = h^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{h^3}{6}$$

Άρα $R_2(f) = -\frac{h^3}{12} \cdot f''(\xi) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$

Σύνθετος Τύπος του Τραπεζίου

Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_i = a + i h$, $i = 0, 1, \dots, n$

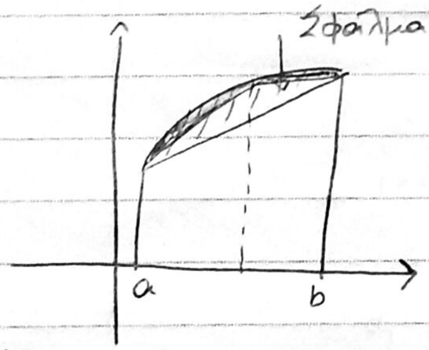
Εφαρμόζουμε τον τύπο του Τραπεζίου σε κάθε υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

τραπεζίου

$$Q_{n+1}^{T}(f) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) + \dots + \frac{h}{2}\left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

$$= h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$



Παράσταση σφάλματος του Σύνθετου Κανόνα Τραπεζίου.

Έστω $f \in C^2[a,b]$, τότε $\exists\ \xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε:

$$R_{n+1}^{T}(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\xi)$$

$$R_{n+1}^{T}(f) = O(h^2)$$

Απόδειξη.

$$R_{n+1}^{T}(f) = I(f) - Q_{n+1}^{T}(f) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - Q_2(f)\Big|_{[x_0,x_1]} + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - Q_2(f)\Big|_{[x_1,x_2]} + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx - Q_2(f)\Big|_{[x_{n-1},x_n]}$$

$$= -\frac{h^3}{12} f''(\xi_1) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_2) - \dots - \frac{h^3}{12} f''(\xi_n) \quad , \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

$$R^T_{n+1}(f) = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

από Θ. Ενδ. τιμών

$$= -n \frac{h^3}{12} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) =$$

$$= -\frac{h^2}{12} (b-a) f''(\xi) \quad \xi \in (a, b)$$

Παράσταση σφάλματος του απλού τύπου του Simpson.

Έστω $f \in C^4[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω

$$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi)$$

Απόδειξη

Θεωρώ το πολυώνυμο $P_3 \in \mathbb{P}_3$ που έχει τιμές

$P_3(x) = f(x_i)$, $i = 0, 2, \dots$ $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 b$ και

Επιπλέον $P_3'(x_1) = f'(x_1)$

Υπάρχει το P_3 και είναι μοναδικό.

Αποδεικνύεται ότι

$$f(x) - P_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} \phi(x) \quad , \phi(x) = (x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

$$\phi(t) = f(t) - P_3(t) - \frac{f(x) - P_3(x)}{\phi(x)} \phi(t)$$

$$R_3(f) = I(f) - Q_3(f) = \int_a^b (f(x) - P_3(x)) dx =$$

$$= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) dx$$

$$= -\frac{1}{24} \int_a^b f^{(4)}(\xi(x)) (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (b-x)\, dx =$$

$$= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(\cancel{b}-x)\,dx \quad \xi \in (a,b)$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

Θέτουμε $x = a + s \cdot h$

$$\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)\,dx = \dots = h^5 \cdot \int_0^2 s(s-1)^2(2-s)\,ds$$

$$= h^5 \int_0^2 \left(-s^4 + 4s^3 - 5s^2 + 2s\right) ds$$

$$= h^5 \left[-\frac{s^5}{5} + s^4 - \frac{5s^3}{3} + s^2\right]_0^2 = \dots = h^5 \frac{-96+300-200}{15} = \frac{4h^5}{15}$$

$$R_3(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot h^5 \frac{4}{15} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$$-\frac{(b-a)^5}{2^5 \cdot 90} = -\frac{(b-a)^5}{2^4 \cdot 180}$$